خیلی سبز ۳۶۰



ریاضی ۱۲

کار در کلاس‌های کتاب درسی

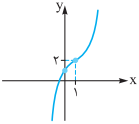
رشتهٔ تجربی

درس ۱

کار در کلاس ـــــــــــــــــــــــــــــ صفحهٔ ۵ کتاب درسی

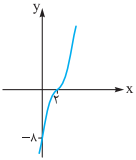
به کمک نمودار تابع $y = x^3$ ، ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y = (x-1)^3 + 2$



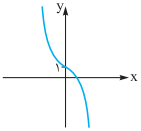
نمودار $y = x^3$ را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:
پس نمودار (۶) مربوط به ضابطهٔ (الف) است.نمودار ۶

ب) $y = (x-2)^3$



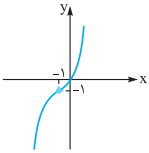
نمودار $y = x^3$ را ۲ واحد به راست منتقل می‌کنیم:
پس نمودار (۹) مربوط به ضابطهٔ (ب) است.نمودار ۹

پ) $y = -x^3 + 1$



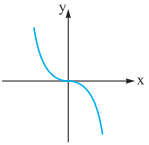
نمودار $y = x^3$ را نسبت به محور xها قرینه کرده سپس آن را ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:
پس نمودار (۸) مربوط به ضابطهٔ (پ) است.نمودار ۸

ت) $y = (x+1)^3 - 1$



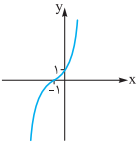
نمودار $y = x^3$ را ۱ واحد به چپ و ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:
پس نمودار (۷) مربوط به ضابطهٔ (ت) است.نمودار ۷

ث) $y = -x^3$



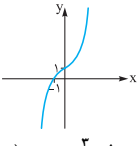
نمودار $y = x^3$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:
پس نمودار (۵) مربوط به ضابطهٔ (ث) است.نمودار ۵

ج) $y=(x+1)^3$



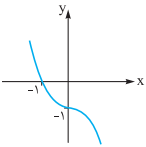
کافی است نمودار $y=x^3$ را ۱ واحد به چپ انتقال دهیم:
پس نمودار (۱) مربوط به ضابطهٔ (ج) است.
نمودار ۱

چ) $y=x^3+1$



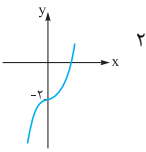
کافی است نمودار $y=x^3$ را ۱ واحد به بالا انتقال دهیم:
پس نمودار (۴) مربوط به ضابطهٔ (چ) است.
نمودار ۴

ح) $y=-x^3-1$



کافی است نمودار $y=x^3$ را نسبت به محور xها قرینه کرده سپس آن را ۱ واحد به پایین حرکت دهیم: نمودار ۳
پس نمودار (۳) مربوط به ضابطهٔ (ح) است.

خ) $y=x^3-2$

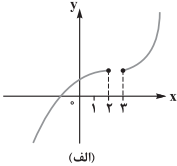


باید نمودار $y=x^3$ را ۲ واحد به پایین حرکت دهیم:
پس نمودار (۲) مربوط به ضابطهٔ (خ) است. نمودار ۲

کار در کلاس

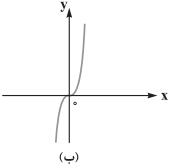
صفحهٔ ۸ کتاب درسی

هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟



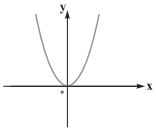
(الف)

این تابع در بازه‌های $(-\infty,2]$ و $[3,+\infty)$ اکیداً صعودی است.



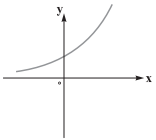
(ب)

این تابع روی $\mathbb{R}$ یعنی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ اکیداً صعودی است.



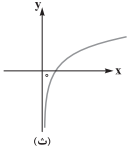
(پ)

این تابع در بازهٔ $[۰,-\infty)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $(۰,+\infty]$ اکیداً صعودی است، ولی در کل $\mathbb{R}$ نه صعودی است نه نزولی.



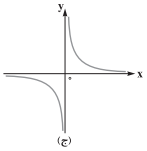
(ت)

این تابع روی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ یعنی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.



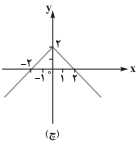
(ث)

این تابع در بازهٔ $(۰,+\infty)$ یعنی در کل دامنه‌اش اکیداً صعودی است.



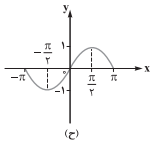
(ج)

این تابع در هر یک از دو بازهٔ $(۰,-\infty)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است ولی در $\mathbb{R}-\{۰\}$ غیریکنوا است.



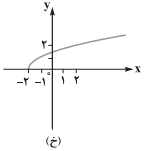
(چ)

این تابع در بازهٔ $[۰,-\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(۰,+\infty]$ اکیداً نزولی است.



(ح)

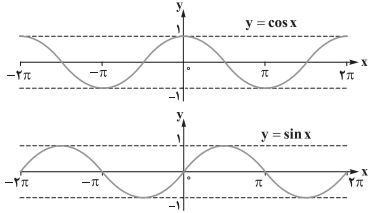
این تابع در بازه‌های $[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$ و $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ اکیداً صعودی است.



(خ)

این تابع در بازهٔ $(-۲,+\infty]$ یعنی در کل دامنه‌اش اکیداً صعودی است.

نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آن‌ها را در بازه‌های مشخص‌شده تعیین نمایید.



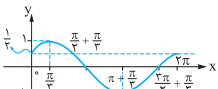
x	$[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
$y=\sin x$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	**صعودی**	نزولی	نزولی	صعودی

x	$[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
$y=\cos x$	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	**صعودی**	صعودی

نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

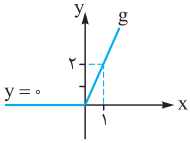
الف) $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$ $\quad D_f=[0, 2\pi]$

با توجه به نمودار، تابع f در بازه‌های $[0, \frac{\pi}{3}]$ و $[\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ اکیداً نزولی است. (نمودار $y=\cos x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{3}$ به راست انتقال داده‌ایم.)



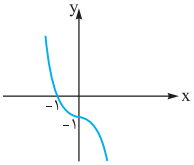
$$g(x)=x+|x|=\begin{cases}x+x & x\geq 0\\ x-x & x<0\end{cases}\Rightarrow g(x)=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

ب) $g(x)=x+|x|$



با توجه به نمودار رسم‌شده، تابع g در بازهٔ $(-\infty,۰]$ هم صعودی است و هم نزولی، چون در این بازه، ثابت است. ضمناً در بازهٔ $[۰,+\infty)$ تابعی اکیداً صعودی است، پس تابع g در کل دامنه‌اش، صعودی است.

پ) $\mathbf{t(x)=-x^{۳}-۱}$



برای رسم این تابع، ابتدا نمودار $y=x^{۳}$ را نسبت به محور xها قرینه کرده، سپس آن را ۱ واحد به پایین حرکت می‌دهیم. با توجه به شکل، متوجه می‌شویم که این تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.

درس ۲

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی

با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته‌شده را در صورت امکان به دست آورید.

x	g(x)
−۳	۸
−۲	۳
−۱	۰
۰	−۱
۱	۰
۲	۳
۳	۸

x	f(x)
−۳	−۷
−۲	−۵
−۱	−۳
۰	−۱
۱	۳
۲	۵
۳	۵

الف) $(\mathbf{fog})(۱)=f(g(۱))=f(۰)=-۱$

ب) $(\mathbf{fog})(-۱)=f(g(-۱))=f(۰)=-۱$

پ) $(\mathbf{gof})(۰)=g(f(۰))=g(-۱)=۰$

ت) $(\mathbf{gog})(-۲)=g(g(-۲))=g(۳)=۸$

ث) $(\mathbf{gof})(۲)=g(f(۲))=g(۵)$ تعریف‌نشده

ج) $(\mathbf{fof})(۱)=f(f(۱))=f(۳)=۵$

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی

اگر $\mathbf{f(x)=\frac{۲}{x-۱}}$ **و** $\mathbf{g(x)=\frac{۳}{x}}$ **، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به دست آورید.**

$D_f=\mathbb{R}-\{۱\}\ ,\ D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\neq ۰ \mid \frac{۳}{x}\neq ۱\}=\{x\neq ۰ \mid x\neq ۳\}$$

$$=\mathbb{R}-\{۰,۳\}$$

ضابطهٔ $fog = (fog)(x) = f(g(x)) = f(\frac{۳}{x}) = \frac{۲}{\frac{۳}{x}-۱} = \frac{۲}{\frac{۳-x}{x}} = \frac{۲x}{۳-x}$

$D_{fof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \neq ۱ \mid \underbrace{\frac{۲}{x-۱} \neq ۱}\} =$

$x-۱\neq ۲ \Rightarrow x\neq ۳$

$\{x \neq ۱ \mid x \neq ۳\} = \mathbb{R} - \{۱, ۳\}$

ضابطهٔ $fof = (fof)(x) = f(f(x)) = f(\frac{۲}{x-۱}) = \frac{۲}{\frac{۲}{x-۱}-۱} = \frac{۲x-۲}{۳-x}$

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی

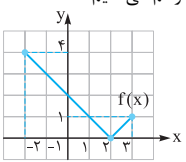
نمودار تابع $f(x) = |x-۲|$ را در بازهٔ $[-۲, ۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x) = -|x-۲|$، $h(x) = \frac{۱}{۲}|x-۲|$ و $k(x) = -\frac{۱}{۳}|۲-x|$ را رسم کنید.

نمودار تابع f را به دو روش نقطه‌یابی یا انتقال می‌توانیم رسم کنیم. ریشهٔ داخل قدرمطلق $x = ۲$ است، پس اگر از روش نقطه‌یابی استفاده کنیم، جدول زیر را رسم می‌کنیم:

ابتدای بازهٔ داده‌شده — انتهای بازهٔ داده‌شده

x	−۲	۲	۳
y	۴	۰	۱

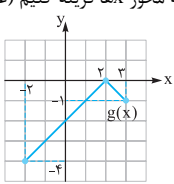
$\Rightarrow$



برای رسم نمودار $g(x) = -|x-۲|$ به کمک نمودار f کافی است نمودار f را نسبت به محور xها قرینه کنیم (عرض نقاط جدول بالا قرینه می‌شوند).

x	−۲	۲	۳
y	−۴	۰	−۱

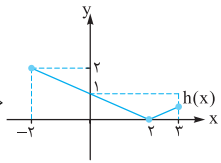
$\Rightarrow$



حالا به سراغ نمودار $h(x) = \frac{۱}{۲}|x-۲|$ می‌رویم و می‌خواهیم آن را به کمک نمودار f رسم کنیم. در واقع باید عرض نقاط f را در عدد $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنیم:

x	-2	2	3
y	$4\times\frac{1}{2}$	$0\times\frac{1}{2}$	$1\times\frac{1}{2}$

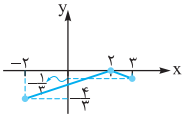
$\Rightarrow$



حال به سراغ $k(x)=-\frac{1}{3}|2-x|$ می‌رویم، می‌دانیم به طور کلی رابطهٔ $|a-b|=|b-a|$ درست است، پس بهتر است $k(x)$ را به شکل $k(x)=-\frac{1}{3}|x-2|$ بنویسیم. اکنون کافی است عرض نقاط f را در عدد $-\frac{1}{3}$ ضرب کنیم:

x	-2	2	3
y	$4\times(-\frac{1}{3})=-\frac{4}{3}$	$0\times(-\frac{1}{3})=0$	$1\times(-\frac{1}{3})=-\frac{1}{3}$

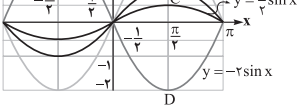
$\Rightarrow$



کار در کلاس

صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی

در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$ ، $y=2\sin x$ ، $y=-2\sin x$ و $y=\frac{1}{2}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y=\sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.



برای رسم نمودار توابع $y=2\sin x$ ، $y=\frac{1}{2}\sin x$ و $y=-2\sin x$ باید عرض نقاط تابع $y=\sin x$ را به ترتیب در اعداد ۲، $\frac{1}{2}$ و -2 ضرب کنیم.

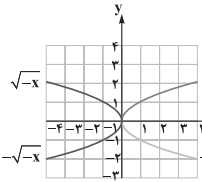
دامنهٔ همهٔ این توابع برابر $[-\pi,\pi]$ هستند، ولی برد آن‌ها متفاوت است و به صورت زیر می‌باشند:

$$-1\le \sin x\le 1 \xrightarrow{\times 2} -2\le 2\sin x\le 2 \Rightarrow R_{(2\sin x)}=[-2,2]$$

$$-1\le \sin x\le 1 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} -\frac{1}{2}\le \frac{1}{2}\sin x\le \frac{1}{2} \Rightarrow R_{(\frac{1}{2}\sin x)}=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$$

$$-1\le \sin x\le 1 \xrightarrow{\times(-2)} -2\le -2\sin x\le 2 \Rightarrow R_{(-2\sin x)}=[-2,2]$$

کار در کلاس — صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی



نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ ، $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.

از روی نمودارهای رسم‌شده نتیجه می‌گیریم که:

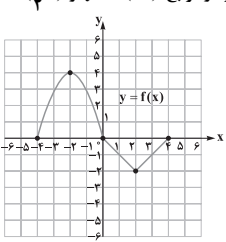
$$\begin{cases} D_{\sqrt{x}}=[0,+\infty) \\ R_{\sqrt{x}}=[0,+\infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} D_{(-\sqrt{x})}=[0,+\infty) \\ R_{(-\sqrt{x})}=(-\infty,0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{\sqrt{-x}}=(-\infty,0] \\ R_{\sqrt{-x}}=[0,+\infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} D_{(-\sqrt{-x})}=(-\infty,0] \\ R_{(-\sqrt{-x})}=(-\infty,0] \end{cases}$$

کار در کلاس — صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی

نمودار تابع f با دامنهٔ $[-4,4]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(2x)$ و $y=f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنیم.

x	f(x)
-4	0
-2	4
0	0
2	-2
4	0



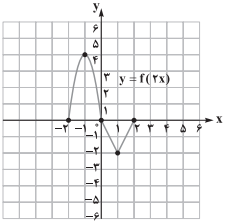
الف) برای تعیین دامنهٔ $y=f(2x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$-4\le 2x\le 4 \Rightarrow -2\le x\le 2$$

بنابراین دامنهٔ تابع $y=f(2x)$ در بازهٔ $[-2,2]$ است. جدول نقاط را کامل کنید.

برای رسم نمودار $f(2x)$، طول نقاط یا همان xها باید محاسبه شود.

x	$2x$	$f(2x)$	$(x,f(2x))$
-2	-4	0	$(-2,0)$
-1	-2	4	$(-1,4)$
0	0	0	$(0,0)$
1	2	-2	$(1,-2)$
2	4	0	$(2,0)$

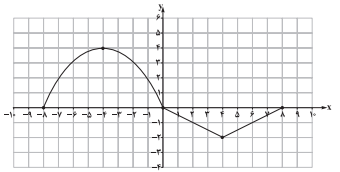


ب) برای تعیین دامنهٔ $y=f(\frac{1}{2}x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$-4 \le \frac{1}{2}x \le 4 \Rightarrow -8 \le x \le 8$$

پس دامنهٔ تابع $y=f(\frac{1}{2}x)$ بازهٔ $[-8,8]$ است و نقاط متناظر به صورت زیر است:

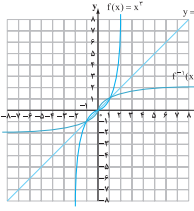
x	$f(\frac{1}{2}x)$
-8	0
-4	4
0	0
4	-2
8	0



درس ۳

کار در کلاس

صفحهٔ ۲۶ کتاب درسی

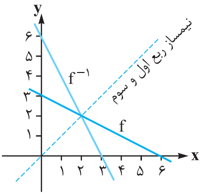


آیا تابع $f(x)=x^3$ یک‌به‌یک است؟ چرا؟ در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع $f(x)=x^3$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطهٔ تابع وارون چیست؟ بله، چون هر خط افقی دلخواه، نمودار f را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. حالا ضابطهٔ تابع وارون f را به دست می‌آوریم:

$$y=x^3 \xrightarrow{\text{از دو طرف، ریشهٔ سوم می‌گیریم.}} x=\sqrt[3]{y}$$

$$\xrightarrow{\text{اسم‌ها را عوض می‌کنیم.}} f^{-1}(x)=y=\sqrt[3]{x}$$

ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.



الف) $f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۳$

$y = -\frac{۱}{۲}x + ۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x = ۳ - y$

$\xrightarrow{\times ۲} x = ۶ - ۲y$

$\xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم.}]{\text{اسم‌ها را}} f^{-۱}(x) = y = ۶ - ۲x$

تابع f تابعی خطی است که دامنه و بردش هر دو $\mathbb{R}$ هستند، پس دامنه و برد $f^{-۱}$ نیز $\mathbb{R}$ هستند.

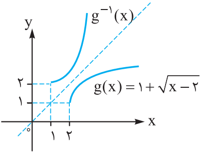
ب) $g(x) = ۱ + \sqrt{x - ۲} \Rightarrow y = ۱ + \sqrt{x - ۲} \Rightarrow \sqrt{x - ۲} = y - ۱$

$\xrightarrow{\text{به‌توان ۲}} x - ۲ = (y - ۱)^۲ \Rightarrow x = (y - ۱)^۲ + ۲$

$\xrightarrow{\text{اسم‌ها را عوض می‌کنیم.}} f^{-۱}(x) = y = (x - ۱)^۲ + ۲$

$$\begin{cases} D_g : x - ۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۲ \Rightarrow D_g = R_{g^{-۱}} = [۲, +\infty) \\ R_g : \sqrt{x - ۲} \geq ۰ \xrightarrow{+۱} \underbrace{\sqrt{x - ۲} + ۱}_{g} \geq ۱ \Rightarrow R_g = D_{g^{-۱}} = [۱, +\infty) \end{cases}$$

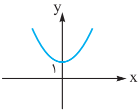
البته از روی شکل هم می‌توانیم دامنه و برد g و $g^{-۱}$ را تعیین کنیم:



پ) $h(x) = x^۲ + ۱$

برای رسم $y = x^۲ + ۱$ باید نمودار $x^۲$ را ۱ واحد به بالا انتقال دهیم:
خطی افقی یافت می‌شود که نمودار را در بیش از ۱ نقطه قطع کند، پس تابع h یک‌به‌یک نیست و در نتیجه معکوس‌پذیر هم نمی‌باشد.

$\xrightarrow{\text{رسم نمودار}}$

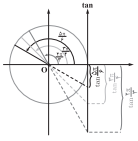
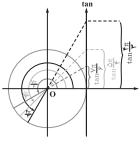
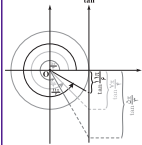


درس ۱

کار در کلاس ـــــــــــــــــــ صفحهٔ ۳۸ کتاب درسی

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع، افزایشی است یا کاهشی؟

ب) بازهٔ تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

ربع	دوم	سوم	چهارم
زوایا			
افزایشی یا کاهشی	افزایشی	افزایشی	افزایشی
(بازهٔ تغییرات)	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$

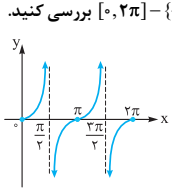
پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت ↗ به معنی افزایش یافتن و علامت ↙ به معنی کاهش یافتن است.)

ربع اول				ربع دوم				ربع سوم				ربع چهارم			
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
0 ↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$ ↗	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0 ↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$ ↗	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗ 0

کار در کلاس ـــــــــــــــــــ صفحهٔ ۳۹ کتاب درسی

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan\alpha$ را در بازهٔ $[0, 2\pi) - \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ بررسی کنید.

نمودار $y = \tan x$ در بازهٔ $[0, 2\pi)$ به‌صورت مقابل است:



واضح است که تابع در بازه‌های $(0, \frac{\pi}{2})$، $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ و $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این بازه‌ها اکیداً صعودی است ولی در کل دامنه‌اش یعنی در بازهٔ $[0, 2\pi)$ غیریکنوا است. (نه صعودی نه نزولی)

درس ۲

کار در کلاس ـــــــــــــــــــــــ صفحهٔ ۴۵ کتاب درسی

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$

$$۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

ب) $۴\sin x + \sqrt{۸} = ۰$

$$۴\sin x + \sqrt{۸} = ۰ \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{۸}}{۴} = -\frac{۲\sqrt{۲}}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + (-\frac{\pi}{۴}) \\ x = ۲k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{۴}) = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴} \end{cases}$$

فصل سوم

درس ۱

کار در کلاس ـــــــــــــــــــــــ صفحهٔ ۵۱ کتاب درسی

۱- در چندجمله‌ای $f(x) = ۳x^۲ - ۵x - ۲$، مقدار $f(۲)$ برابر صفر است، بنابراین $f(x)$ بر $(x-۲)$ بخش‌پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

$$\begin{array}{rrrrl} ۳x^۲ & - & ۵x & - & ۲ \\ -(۳x^۲ & - & ۶x) & & \\ \hline & & x & - & ۲ \\ & - & (x & - & ۲) \\ \hline & & R & = & ۰ \end{array} \quad \Big| \begin{array}{l} x-۲ \\ \hline ۳x+۱ \end{array}$$

بنا بر رابطهٔ تقسیم داریم: $f(x) = ۳x^۲ - ۵x - ۲ = (x-۲)(۳x+۱)$

همان‌گونه که دیده می‌شود، $f(x)$ به صورت حاصل‌ضرب عامل‌های اول نوشته شده است.

۲- چندجمله‌ای $g(x) = ۲x^۳ + x^۲ + ۱$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $g(x)$ بر $(x+۱)$ بخش‌پذیر است؟ بله چرا؟ چون $g(-۱)$ برابر صفر است:

$$g(-۱) = ۲(-۱)^۳ + (-۱)^۲ + ۱ = -۲ + ۱ + ۱ = ۰$$

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 + 1 & x+1 \\ \hline -2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - x + 1 \\ \hline -x^2 + 1 & \\ x^2 + x & \\ \hline x + 1 & \\ -x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

باقی‌مانده صفر شد. $\Rightarrow$

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید. $g(x) = (x+1)(2x^2 - x + 1)$

۳- نشان دهید چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر دوجمله‌ای $x+2$ بخش‌پذیر است. باید ریشهٔ مقسوم‌علیه را پیدا کرده و آن را در مقسوم به جای x‌ها قرار دهیم:

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow R = f(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - 3(-2) - 10$$
$$= -16 + 20 + 6 - 10 = 0$$

کار در کلاس

صفحهٔ ۵۳ کتاب درسی

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = \dfrac{(-3)^2 - 9}{(-3)^2 + 3(-3)} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

حالا صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم تا عامل صفرشونده یعنی $(x+3)$ از صورت و مخرج، ساده شوند:

$$\text{حد بالا} = \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{x\cancel{(x+3)}} = \frac{-6}{-3} = 2$$

ب) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1} = \dfrac{4(\frac{1}{2})^2 - 4(\frac{1}{2}) + 1}{2(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 1} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

اکنون به کمک تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها و یا تقسیم چندجمله‌ای‌ها باید عامل صفرشونده یعنی $(x - \frac{1}{2})$ را از صورت و مخرج ساده کنیم، صورت کسر، از اتحاد مربع دوجمله‌ای است. مخرج را بر $(x - \frac{1}{2})$ تقسیم می‌کنیم:

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 2x^2 & + x & - 1 & x-\frac{1}{2} \\
\hline
-(& 2x^2 & - x) & & 2x+2 \\
\hline
 & & 2x & - 1 & \\
 & & - (2x & - 1) & \\
\hline
 & & 0 & &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow 2x^2+x-1=(x-\frac{1}{2})(2x+2)=(x-\frac{1}{2})\times 2\times(x+1)$$
$$=(2x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow \text{حد مورد نظر}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)^2}{(2x-1)(x+1)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2(\frac{1}{2})-1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{0}{\frac{3}{2}}=0$$

پ) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9}=\frac{3^2-5(3)+6}{2(3)^3-13(3)^2+24(3)-9}=\frac{0}{0}$

صورت کسر را به کمک اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم، مخرج را نیز بر $(x-3)$ تقسیم می‌کنیم.

صورت: $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 2x^3 & - 13x^2 & + 24x - 9 & x-3 \\
\hline
- & (2x^3 & - 6x^2) & & 2x^2-7x+3 \\
\hline
 & & - 7x^2 & + 24x - 9 & \\
 & & - (-7x^2 & + 21x) & \\
\hline
 & & & 3x - 9 & \\
 & & & - (3x - 9) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \text{مخرج کسر}=(x-3)(2x^2-7x+3)$$

$$\text{حاصل حد مورد نظر}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(2x^2-7x+3)}=\frac{3-2}{2(3)^2-7(3)+3}=\frac{1}{0}=\infty$$

ت) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}=\frac{(-1)^2-1}{-1+\sqrt{2(-1)+3}}=\frac{0}{0}$ مبهم

چون در مخرج کسر، عبارت رادیکالی به شکل $a+\sqrt{b}$ وجود دارد، صورت و مخرج را در $a-\sqrt{b}$ ضرب می‌کنیم، ضمناً (x^2-1) را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\text{حد موردنظر}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{x+\sqrt{2x+3}}\times\frac{x-\sqrt{2x+3}}{x-\sqrt{2x+3}}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2-2x-3}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}(x-\sqrt{2x+3})}{(x-3)\cancel{(x+1)}}=\frac{(-2)(-2)}{-4}=-1$$

ث) $\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2}=\frac{1-\sqrt{1}}{1^2+1-2}=\frac{0}{0}$ مبهم

باز هم با یک عبارت رادیکالی به شکل $a-\sqrt{b}$ مواجه‌ایم، پس صورت و مخرج را در $a+\sqrt{b}$ ضرب کرده و ضمناً مخرج را به کمک اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{(x+2)(x-1)}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(x+2)\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{x})}=\frac{1}{3\times 2}=\frac{1}{6}$$

ج) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}=\frac{\sqrt[3]{-1}+1}{(-1)^2+3(-1)+2}=\frac{0}{0}$ مبهم

چون فرجهٔ رادیکال ۳ است، باید از اتحاد $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ استفاده کنیم. به همین منظور $(\sqrt[3]{x}+1)$ را $(a+b)$ فرض کرده و صورت و مخرج کسر را در عبارت $(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)$ یعنی در (a^2-ab+b^2) ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{(x+2)(x+1)}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x+1}}{(x+2)\cancel{(x+1)}(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{1\times(3)}=\frac{1}{3}$$

۱- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{2x}{x-5}=\frac{2(5)}{5^- -5}=\frac{10}{0^-}=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{2x}{x-5}=\frac{2(5)}{5^+ -5}=\frac{10}{0^+}=+\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}$

$$\begin{cases}\xrightarrow{\text{حد راست}} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{(0^+)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\\ \xrightarrow{\text{حد چپ}} \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{(0^-)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}=-\infty$$

ت) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2}{|x-3|}$

$$\begin{cases}\xrightarrow{\text{حد راست}} \lim\limits_{x\to 3^+}=\frac{2}{x-3}=\frac{2}{0^+}=+\infty\\ \xrightarrow{\text{حد چپ}} \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{2}{-(x-3)}=\frac{2}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{2}{|x-3|}=+\infty$$

ث) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\frac{[x]}{|3x+1|}$

$$\begin{cases}\xrightarrow{\text{حد راست}} \lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})^+}\frac{[x]}{3x+1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\\ \xrightarrow{\text{حد چپ}} \lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})^-}\frac{[x]}{-(3x+1)}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -\frac{1}{3}}\frac{[x]}{|3x+1|}=-\infty$$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{\sin^2 x}$

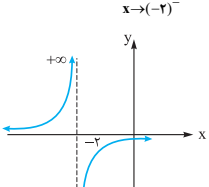
$$\begin{cases}\xrightarrow{\text{حد راست}} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+1}{\sin^2 x}=\frac{0+1}{(\sin 0^+)^2}=\frac{1}{(0^+)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty\\ \xrightarrow{\text{حد چپ}} \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x+1}{\sin^2 x}=\frac{0+1}{(\sin 0^-)^2}=\frac{1}{(0^-)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{\sin^2 x}=+\infty$$

تفکر در تمام موارد (پ)، (ت)، (ث) و (ج) می‌توانستیم حد چپ و راست را جداگانه حساب نکنیم، چون در مخرج آن‌ها عباراتی به شکل $\square^2$ و $|\square|$ وجود دارد و جواب حد مخرج برابر 0^+ است.

۲- نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف ۲- تعریف شده باشد، به طوری که $\lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = +\infty$. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

این سؤال، یک جواب منحصر به فرد ندارد. یکی از جواب‌ها به صورت مقابل است:



درس ۲

کار در کلاس

صفحهٔ ۶۰ کتاب درسی

۱- مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to-\infty} \frac{۳x+۲}{x-۱} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(۳+\frac{۲}{x})}{x(۱-\frac{۱}{x})} = \frac{۳}{۱} = ۳$

ب) $\lim_{t\to-\infty} \frac{۱-۵t^۲}{t^۲+۳t} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^۲(\frac{۱}{t^۲}-۵)}{t^۲(۱+\frac{۳}{t})} = -\frac{۵}{۱} = -۵$

پ) $\lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{۲-۳x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{۲-۳\times(+\infty)} = \frac{۱}{۲-\infty} = \frac{۱}{-\infty} = ۰$

۲- الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-۱) باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید. بی‌شمار تابع وجود دارند که حد همهٔ آن‌ها در $+\infty$ برابر -۱ شود. مانند:

$f(x) = \frac{-۳x+۱}{۳x-۶}$ یا $f(x) = \frac{۵-x^۲}{x^۲+۷x}$

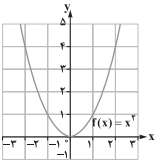
یعنی هر تابع به شکل $y = \frac{ax^n+\cdots}{bx^n+\cdots}$ به شرطی که $\frac{a}{b}$ برابر -۱ باشد، جواب است.

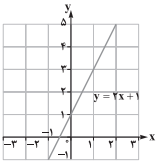
ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید. بی‌شمار تابع وجود دارند که حد همهٔ آن‌ها در $-\infty$ برابر ۱۰۰ می‌باشد. مانند:

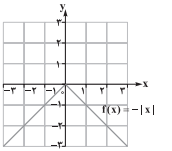
$f(x) = \frac{۱۰۰x-۱}{x+۶}$ یا $f(x) = \frac{۵۰۰x^۲-۸x}{۵x^۲+۷x+۳}$

یعنی هر تابع به شکل $y = \frac{ax^n+\cdots}{bx^n+\cdots}$ به شرطی که $\frac{a}{b}$ برابر ۱۰۰ باشد، جواب این سؤال است.

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



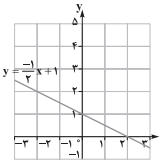


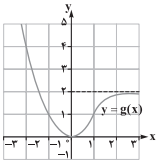


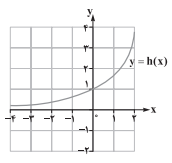
الف) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x^{۲}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^{۲}=+\infty\end{cases}$

ب) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} (۲x+۱)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} (۲x+۱)=+\infty\end{cases}$

پ) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\end{cases}$







ت) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} (-\frac{۱}{۲}x+۱)\\ =+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} (-\frac{۱}{۲}x+۱)\\ =-\infty\end{cases}$

ث) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=۲\end{cases}$

ج) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} (hx)=۰\\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty\end{cases}$

حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۲x^{۳}-۵x+۴}{۷x^{۳}-۱۱x^{۲}-۶x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۲x^{۳}}{۷x^{۳}}=\frac{۲}{۷}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۵x+۴}{x^{۳}+x-۸}=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۵x}{x^{۳}}=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۵}{x^{۲}}=\frac{۵}{(-\infty)^{۲}}=\frac{۵}{+\infty}=۰$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-۴x^{۷}+۵x^{۲}}{۲x^{۳}+۹}=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-۴x^{۷}}{۲x^{۳}}=\lim\limits_{x\to-\infty} (-۲x^{۴})=-۲(-\infty)^{۴}$

$=-۲(+\infty)=-\infty$

درس ۱

کار در کلاس ـــــــــــــــــــ صفحهٔ ۷۲ کتاب درسی

معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $y = x^۲ + ۳$ را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.

به کمک تعریف مشتق، شیب خط مماس بر منحنی y را در نقطهٔ $x = -۲$ به دست می‌آوریم: $f(x) = x^۲ + ۳ \Rightarrow f(-۲) = (-۲)^۲ + ۳ = ۷$

$$f'(a) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{f(-۲+h)-f(-۲)}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{(-۲+h)^۲ + ۳ - ۷}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{\cancel{۴} - ۴h + h^۲ - \cancel{۴}}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{\cancel{h}(h-۴)}{\cancel{h}} = ۰ - ۴ = -۴$$ شیب خط مماس

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \xrightarrow[m=-۴]{A\ \begin{vmatrix} -۲ \to x_۱ \\ ۷ \to y_۱ \end{vmatrix}} y - ۷ = -۴(x+۲)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -۴x - ۱}$$ معادلهٔ خط مماس

کار در کلاس ـــــــــــــــــــ صفحهٔ ۷۴ کتاب درسی

الف) برای تابع $f(x) = -x^۲ + ۱۰x$، $f'(۸)$ و $f'(۵)$ را حساب کنید.

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Rightarrow f'(۸) = \lim_{x\to ۸} \frac{f(x)-f(۸)}{x-۸}$$

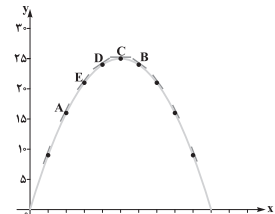
$$= \lim_{x\to ۸} \frac{(-x^۲ + ۱۰x) - ۱۶}{x-۸} = \lim_{x\to ۸} \frac{-(x^۲ - ۱۰x + ۱۶)}{x-۸}$$

$$= \lim_{x\to ۸} \frac{-\cancel{(x-۸)}(x-۲)}{\cancel{x-۸}} = -(۸-۲) = -۶$$

$$f'(۵) = \lim_{x\to ۵} \frac{f(x)-f(۵)}{x-۵} = \lim_{x\to ۵} \frac{-x^۲ + ۱۰x - ۲۵}{x-۵}$$

$$= \lim_{x\to ۵} \frac{-(x^۲ - ۱۰x + ۲۵)}{x-۵} = \lim_{x\to ۵} \frac{-(x-۵)^{\cancel{۲}}}{\cancel{x-۵}} = -(۵-۵) = ۰$$

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آن‌ها قرینهٔ یکدیگر باشند.



هر دو نقطه که نسبت به خط تقارن سهمی (خط $x = ۵$) قرینهٔ هم باشند، شیبشان قرینهٔ یکدیگر است، مثلاً شیب نقاط B و D قرینه است. می‌توان این موضوع را به کمک تعریف مشتق اثبات کرد. فرض کنید طول‌های این دو نقطهٔ مورد نظر، a و b باشند، پس داریم:

$$f'(a) = -f'(b) \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{-x^۲+۱۰x+a^۲-۱۰a}{x-a} = -\lim_{x\to b}\frac{-x^۲+۱۰x+b^۲-۱۰b}{x-b}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\overbrace{(-x^۲+a^۲)}^{-(x-a)(x+a)}+۱۰(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to b}\frac{\overbrace{x^۲-b^۲}^{(x-b)(x+b)}-۱۰(x-b)}{x-b}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(-x-a+۱۰)}{\cancel{x-a}} = \lim_{x\to b}\frac{\cancel{(x-b)}(x+b-۱۰)}{\cancel{x-b}}$$

$$\Rightarrow -۲a+۱۰ = ۲b-۱۰ \Rightarrow a+b = ۱۰$$

پس هر دو نقطه‌ای روی سهمی که مجموع طولشان ۱۰ باشد، شیب خط مماس در آن‌ها با هم قرینه‌اند.

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است. در نقاط بازهٔ $[۰,۵)$ شیب خطوط مماس و در نتیجه مشتق، مثبت است و در نقاط بازهٔ $(۵,۱۰]$ شیب خطوط مماس منفی و در نتیجه مشتق هم منفی است. به عبارت دیگر در بازهٔ $[۰,۵)$ نمودار تابع، صعودی است، پس $y' > ۰$ و در بازهٔ $(۵,۱۰]$ نمودار تابع نزولی است، پس $y' < ۰$.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید. از روی شکل واضح است که زاویهٔ ایجادشده بین خط مماس در نقطهٔ $x = ۳$ و جهت مثبت محور xها بیشتر از همین زاویه در نقطهٔ $x = ۴$ است، پس شیب خط مماس در $x = ۳$ بیشتر است.

ث) با محاسبهٔ $f'(۳)$ و $f'(۴)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

$$f'(۳) = \lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳}\frac{-x^۲+۱۰x-۲۱}{x-۳}$$

$$= \lim_{x\to ۳}\frac{-(x-۳)(x-۷)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳}-(x-۷) = ۴$$

$$f'(۴)=\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{-x^{۲}+۱۰x-۲۴}{x-۴}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{-(x-۴)(x-۶)}{x-۴}=\lim_{x\to ۴}-(x-۶)=۲$$

پس نتیجه می‌گیریم که: $f'(۳)>f'(۴)$

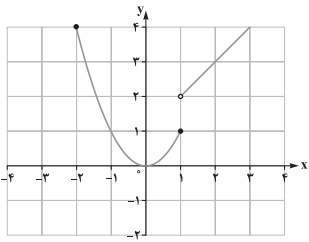
درس ۲

کار در کلاس

صفحهٔ ۷۸ کتاب درسی

تابع g (شکل روبه‌رو) را به صورت $g(x)=\begin{cases}x^{۲} & x\le ۱\\ x+۱ & x>۱\end{cases}$ در نظر می‌گیریم.

چرا $g'(۱)$ موجود نیست؟ چون تابع g در $x=۱$ ناپیوسته است، لذا مشتق‌پذیر هم نیست، ولی بدون توجه به ناپیوستگی نیز، می‌توانیم ثابت کنیم که تابع g در $x=۱$ مشتق ندارد:



$$g'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{g(x)-g(۱)}{x-۱}$$

$$\begin{cases}\xrightarrow{\text{حد راست}} \lim\limits_{x\to ۱^{+}}\dfrac{x+۱-۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}\dfrac{x}{x-۱}=\dfrac{۱}{۰^{+}}=+\infty\\ \xrightarrow{\text{حد چپ}} \lim\limits_{x\to ۱^{-}}\dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\dfrac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{x-۱}}=۲\end{cases}$$

مشتق راست g در $x=۱$ موجود نیست، پس g در $x=۱$ مشتق‌ناپذیر است.

کار در کلاس

صفحهٔ ۷۹ کتاب درسی

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-۱$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادلهٔ نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x=-۱$ را بنویسید. به کمک تعریف مشتق خواهیم داشت:

$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x-(-۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{|x^{۲}-۱|-۰}{x+۱}$$

(-1) داخل قدرمطلق را به صفر تبدیل می‌کند و ریشهٔ ساده است، پس باید مشتق چپ و راست را جداگانه حساب کنیم:

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{-(x^2-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{-(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=2$$

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{(x^2-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=-2$$

پس $f'_+(-1)\neq f'_-(-1)$ لذا f در -1 مشتق‌پذیر نیست، ولی چون حاصل مشتق‌ها عددهای متناهی شدند می‌توانیم معادلهٔ مماس‌های چپ و راست را در $x=-1$ بنویسیم:

$$(A\Big|_{0}^{-1},\ f'_+(-1)=2)\xrightarrow{y-y_1=m(x-x_1)}y-0=2(x+1)$$

$\Rightarrow$ معادلهٔ نیم‌مماس راست $y=2x+2$

$$(A\Big|_{0}^{-1},\ f'_-(-1)=-2)\ \Rightarrow\ y-0=-2(x+1)$$

$\Rightarrow$ معادلهٔ نیم‌مماس چپ $y=-2x-2$

کار در کلاس

صفحهٔ ۸۲ کتاب درسی

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص‌شده، مشتق‌پذیر نیست.



شکل (۱)



شکل (۲)

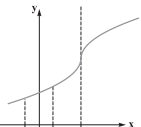


شکل (۳)

نقاط x_1 و x_3 گوشه‌ای هستند، پس تابع در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست.

تابع در x_2 و x_3 ناپیوسته است و در نتیجه مشتق ندارد.

x_2 نقطهٔ گوشه‌ای است، پس تابع در آن مشتق‌پذیر نیست. (مشتق‌های چپ و راست در x_2 مساوی نیستند.)

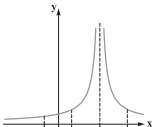


شکل (۶)

نقطهٔ x_2 نقطهٔ بازگشتی است، پس تابع در آن مشتق ندارد.

شکل (۵)

تابع در x_3 پیوسته است، ولی خط مماس در x_3 عمودی است، لذا مشتق در x_3 وجود ندارد.

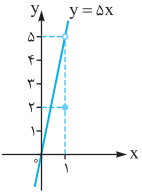


شکل (۴)

تابع در x_3 ناپیوسته است، پس در آن مشتق هم ندارد.

کار در کلاس ـــــــــــــــــــ صفحهٔ ۸۴ کتاب درسی

اگر $f(x)=\begin{cases}5x & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$ **دامنه** f **و دامنه** f' **را محاسبه کنید و ضابطه** f' **را به دست آورید. نمودار** f **و نمودار** f' **را رسم کنید.**



x	۰	۲
y	۰	۱۰

دامنهٔ f برابر اجتماع دامنه‌های دو ضابطهٔ f است:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 1\}\cup\{1\}=\mathbb{R}$$

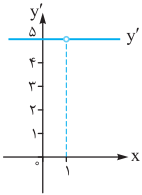
توجه کنید که f در $x=1$ ناپیوسته است، پس مشتق هم ندارد:

$$\begin{cases}f(1)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=5(1)=5\end{cases}$$

پس دامنهٔ f' برابر با $\mathbb{R}-\{1\}$ است. حالا ضابطهٔ f' را به دست می‌آوریم. $(a\neq 1)$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{5x-5a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{5(x-a)}{x-a}=5$$

پس ضابطهٔ f' برابر است با: $f'(x)=5$



کار در کلاس ـــــــــــــــــــ صفحهٔ ۸۷ کتاب درسی

۱) مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید:

الف $f(x)=\frac{۱}{x-۴} \Rightarrow f'(x)=\frac{(۰)(x-۴)-(۱)(۱)}{(x-۴)^۲}=\frac{-۱}{(x-۴)^۲}$

ب $g(x)=(\frac{-۳x-۱}{x^۲+۵})^۸$

$$\Rightarrow g'(x)=۸\times(\frac{-۳(x^۲+۵)-۲x(-۳x-۱)}{(x^۲+۵)^۲})(\frac{-۳x-۱}{x^۲+۵})^۷$$

پ $h(x)=\frac{x}{۲x^۲+x-۱}$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{۱(۲x^۲+x-۱)-(۴x+۱)(x)}{(۲x^۲+x-۱)^۲}=\frac{-۲x^۲-۱}{(۲x^۲+x-۱)^۲}$$

۲) اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳$ ، $f'(۲)=۵$ ، $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$ مقدار $(fg)'(۲)$ و $(\frac{f}{g})'(۲)$ را به دست آورید.

$$(fg)'(۲)=f'(۲)g(۲)+g'(۲)f(۲)=۵\times۸+(-۶)(۳)=۴۰-۱۸=۲۲$$

$$(\frac{f}{g})'(۲)=\frac{f'(۲)g(۲)-g'(۲)f(۲)}{(g(۲))^۲}=\frac{۵\times۸-(-۶)(۳)}{۸^۲}=\frac{۵۸}{۶۴}=\frac{۲۹}{۳۲}$$

کار در کلاس ـــــــــــــــــــ صفحهٔ ۸۸ کتاب درسی

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید.

الف $f(x)=(x^۲+۱)^۳(۵x-۱)$

می‌دانیم اگر $y=u.v$ ، آن‌گاه داریم: $y'=u'.v+v'.u$

بنابراین:

$$f'(x)=۳(۲x)(x^۲+۱)^۲(۵x-۱)+۵(x^۲+۱)^۳$$

ب $g(x)=(\frac{-۳x-۱}{x^۲+۵})^۸$

$$\Rightarrow g'(x)=۸\times(\frac{-۳(x^۲+۵)-۲x(-۳x-۱)}{(x^۲+۵)^۲})(\frac{-۳x-۱}{x^۲+۵})^۷$$

کار در کلاس ـــــــــــــــــــ صفحهٔ ۸۹ کتاب درسی

مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ را به طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازهٔ $[a,b)$ مشتق‌پذیر است، هرگاه در تمام نقاط بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و ضمناً در نقطهٔ a مشتق راست داشته باشد.

تابع f روی بازهٔ $(a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه در تمام نقاط بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و ضمناً در نقطهٔ b مشتق چپ داشته باشد.

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty,+\infty)$ مشتق‌پذیر است.

اگر $f(x)=\begin{cases}2x+4 & x<-1\\ x^2-1 & -1\le x<2\\ -x+5 & 2<x<5\end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های $[-1,1]$، $(2,5)$ و $[-2,0]$ بررسی کنید.

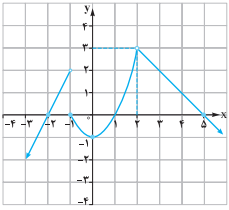
$$f(x)=\begin{cases}2x+4 & x<-1\\ x^2-1 & -1\le x<2\\ -x+5 & 2<x<5\end{cases}$$

x	−۱	−۲
y	۲	۰

x	−۱	۰	۲
y	۰	−۱	۳

x	۲	۵
y	۳	۰

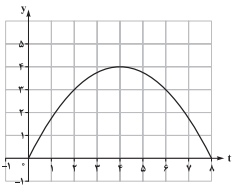
از روی شکل معلوم است که تابع در بازهٔ $[-1,1]$ مشتق‌پذیر است، چون اولاً در تمام نقاط بازهٔ $(-1,1)$ مشتق‌پذیر است، ثانیاً در $x=-1$ مشتق راست دارد و ثالثاً در $x=1$ مشتق چپ دارد. ضمناً تابع در بازهٔ $(2,5)$ نیز مشتق‌پذیر است، چون در تمام نقاط این بازه، تابع مشتق دارد. تابع در بازهٔ $[-2,0]$ مشتق‌پذیر نیست، چون در $x=-1$ از این بازه پیوسته نیست.



درس ۳

۱) نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظهٔ t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

(محاسبهٔ عددی لازم نیست.)



A سرعت متوسط بین $t=1$ و $t=3$ **B** سرعت متوسط بین $t=5$ و $t=6$

C سرعت لحظه‌ای در $t=1$

D سرعت لحظه‌ای در $t=3$

E سرعت لحظه‌ای در $t=5$ **F** سرعت لحظه‌ای در $t=6$

سرعت متوسط بین $t=1$ و $t=3$ در واقع شیب پاره‌خطی است که دو نقطهٔ متناظر با این زمان‌ها را به هم وصل می‌کند. به طریق مشابه می‌توان سرعت متوسط بین $t=5$ و $t=6$ را تعریف کرد. سرعت لحظه‌ای در هر نقطه از منحنی، همان شیب خط مماس بر منحنی است، لذا با توجه به نمودار داده‌شده می‌توان نتیجه گرفت که:

$$C > A > D > E > B > F$$

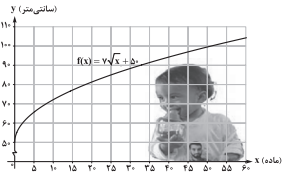
کار در کلاس

صفحهٔ ۹۶ کتاب درسی

الف) آهنگ متوسط رشد در بازهٔ زمانی $[0,25]$ چه‌قدر است؟

$$\text{آهنگ متوسط رشد} = \frac{f(25)-f(0)}{25-0} = \frac{(7\sqrt{25}+50)-(7\sqrt{0}+50)}{25} = \frac{7}{5} = 1/4$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟



$$f(x) = 7\sqrt{x} + 25 \Rightarrow f'(x) = 7\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{x=25} f'(25) = 7 \times \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{7}{10} = 0/7 \\ \xrightarrow{x=49} f'(49) = 7 \times \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{7}{14} = 0/5 \end{cases}$$

پس آهنگ تغییر لحظه‌ای قد کودک در ۲۵ ماهگی بیشتر از ۴۹ ماهگی اوست.

پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانتی‌متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

$$f(16) = 80 \text{ cm} \quad , \quad f(36) = 95 \text{ cm}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر رشد علی} = \frac{(\text{قد علی در ۳۶ ماهگی}) - (\text{قد علی در ۱۶ ماهگی})}{36-16}$$

$$= \frac{95-80}{20} = 0/75 \text{ cm}$$

آهنگ متوسط تغییر استاندارد (با توجه به نمودار داده‌شده) در همین بازهٔ زمانی برابر است با:

$$\text{آهنگ متوسط استاندارد} = \frac{f(36)-f(16)}{36-16} = \frac{(7\sqrt{36}+50)-(7\sqrt{16}+50)}{20} = 0/7$$

پس آهنگ متوسط رشد قد علی در بازهٔ زمانی ۱۶ تا ۳۶ ماهگی از آهنگ متوسط استاندارد، بیشتر است.

با توجه به مثال قبل:

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

$$h(t)=-۵t^۲+۴۰t \Rightarrow h'(t)=-۱۰t+۴۰ \xrightarrow{t=۰} h'(۰)=۴۰\,m/s$$

$$\xrightarrow{t=۸} h'(۸)=-۸۰+۴۰=-۴۰\,m/s$$

ب) سرعت متوسط جسم را در بازهٔ زمانی $[۵,۸]$ به دست آورید.

$$\text{سرعت متوسط در بازهٔ } [۵,۸] = \frac{h(۸)-h(۵)}{۸-۵}=\frac{۰-۷۵}{۳}=-۲۵\,m/s$$

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم $۳۵\,m/s$ و $-۳۵\,m/s$ است.

می‌دانیم سرعت، همان مشتق تابع است. لذا داریم:

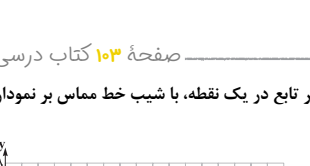
$$h'(t)=۳۵ \Rightarrow -۱۰t+۴۰=۳۵ \Rightarrow t=۰/۵\,(s)$$

$$h'(t)=-۳۵ \Rightarrow -۱۰t+۴۰=-۳۵ \Rightarrow t=۷/۵\,(s)$$

فصل پنجم

درس ۱

از فصل قبل می‌دانیم که مشتق هر تابع در یک نقطه، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است. تابع زیر را در نظر بگیرید:



ملاحظه می‌شود که:

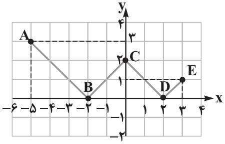
الف) در بازهٔ $(۱,۷)$ که f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، مثبت است؛ بنابراین در این بازه علامت f' مثبت است.

ب) در بازهٔ $(۷,۱۲)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، منفی است؛ بنابراین در این بازه علامت f' منفی است.

پ) در بازهٔ $(۱۲,+\infty)$ که تابع، مقدار ثابت دارد، مقدار f' برابر صفر است.

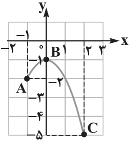
کار در کلاس

نوع اکسترمم‌های نسبی هر یک از توابع زیر را در نقاط مشخص‌شده تعیین کنید و جدول‌ها را کامل کنید.



الف) $f(x)=||x|-۲|, x\in[-۵,۳]$

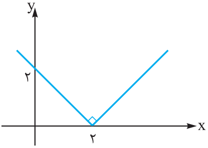
نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نه max نسبی و نه min نسبی	–	–
B	min نسبی	۰	$f'(-۲)$ موجود نیست.
C	max نسبی	۲	$f'(۰)$ موجود نیست.
D	min نسبی	صفر	$f'(۲)$ موجود نیست.
E	نه max نسبی و نه min نسبی چون تابع در همسایگی راست آن تعریف نشده است.	–	–



ب) $g(x)=-x^۲-۱, x\in[-۱,۲]$

نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نقطهٔ اکسترمم نسبی نیست.	–	–
B	max نسبی	-۱	$f'(۰)$ برابر صفر است.
C	نقطهٔ اکسترمم نسبی نیست چون تابع در همسایگی راست آن تعریف نشده است.	–	–

۱- الف) با رسم نمودار تابع $f(x)=|x-2|$ ، نشان دهید که f در $x=2$ مینیمم نسبی دارد.



$\Rightarrow$ نقطهٔ (۲,۰) مینیمم نسبی است چون عرض آن نسبت به عرض نقاط همسایگی خود، کم‌تر است.

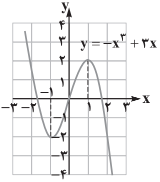
ب) آیا $f'(2)$ موجود است؟ چرا؟ خیر چون $x=2$ نقطهٔ گوشه‌ای است، یعنی داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x-2 & x\geq 2\\ -x+2 & x<2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}1 & x>2\Rightarrow f'_+(2)=1\\ -1 & x<2\Rightarrow f'_-(2)=-1\end{cases}$$

می‌بینید که مشتق راست در $x=2$ با مشتق چپ برابر نیست، پس f در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

پ) آیا $x=2$ طول نقطهٔ بحرانی تابع است؟ چرا؟ بله چون $f'(2)$ موجود نیست.

۲- نمودار تابع $f(x)=-x^3+3x$ را رسم کرده‌ایم.



الف) طول‌های نقاط اکسترمم نسبی f را تعیین کنید.

$x=1$ طول ماکزیمم نسبی و $x=-1$ طول مینیمم نسبی است.

ب) می‌دانیم این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ ، یعنی طول‌های نقاط بحرانی تابع را به دست آورید.

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ -3x^2+3=0\ \Rightarrow\ x^2=1\ \Rightarrow\ x=\pm 1$$

پ) با توجه به (الف) و (ب)، درستی قضیهٔ فرما را در مورد این تابع بررسی کنید.

$x=1$ و $x=-1$ طول نقاط اکسترمم نسبی هستند و مشتق در آن‌ها موجود است و داریم $f'(-1)=0$ و $f'(1)=0$ یعنی نقاط اکسترمم نسبی، بحرانی هم هستند.

۳- تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^2+2x+2$ را در نظر بگیرید. f همواره مشتق‌پذیر است.

الف) $f'(x)$ را به دست آورید. $f'(x)=-2x+2$

ب) ریشهٔ معادلهٔ $f'(x)=0$ را محاسبه کنید تا طول نقاط بحرانی تابع به دست آید.

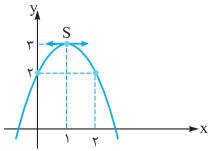
$f'(x)=0\ \Rightarrow\ -2x+2=0\ \Rightarrow\ x=1$ طول نقطهٔ بحرانی

پ) با رسم نمودار سهمی، تحقیق کنید که آیا نقطهٔ اکسترمم f منطبق بر نقطهٔ بحرانی آن است؟

$$f(x)=-x^2+2x+2\Rightarrow x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2(-1)}=1\xrightarrow{\text{در تابع}} y_S=3$$

x	۰	۱	۲
y	۲	۳	۲

$\Rightarrow$



از روی نمودار، واضح است که نقطهٔ اکسترمم نسبی (max نسبی) بر نقطهٔ بحرانی منطبق است. زیرا شیب مماس در نقطهٔ رأس برابر صفر است. (مماس افقی است.)

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۰۸ کتاب درسی

۱- جدول تغییرات تابع $f(x)=-x^2-2x$ در زیر آمده است که در آن با تعیین علامت f'، بازه‌هایی که تابع f در آن‌ها صعودی است و هم‌چنین بازه‌هایی که نزولی می‌باشد، تعیین شده است. هم‌چنین، اکسترمم نسبی تابع در جدول مشخص شده است:

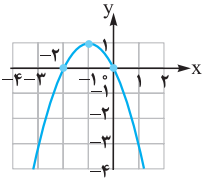
طول نقطهٔ بحرانی $f'(x)=0 \Rightarrow x=-1$ $\qquad f'(x)=-2x-2$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
بازه		$(-\infty,-1)$		$(-1,+\infty)$	
علامت f'		+	۰	−	
یکنوایی f		صعودی اکید	۱	نزولی اکید	
	$-\infty$ ↗		max نسبی	↘	$-\infty$

با توجه به جدول، مشخص کنید که نقطهٔ به طول (-1)، ماکزیمم نسبی تابع است؛ چرا که رفتار تابع در این نقطه از صعودی اکید به نزولی اکید تغییر کرده است. با توجه به جدول و در صورت لزوم با یافتن نقاط دیگری از تابع، نمودار آن را رسم کنید.

x	-2	-1	۰
y	۰	۱	۰

$\Rightarrow$



۲- جدولی مشابه جدول بالا برای تابع $g(x)=x^3-3x^2$ رسم کنید که نقاط اکسترمم نسبی تابع در آن مشخص شده باشد.

ابتدا معادلهٔ $g'(x)=0$ را حل می‌کنیم تا نقطه یا نقاط بحرانی تابع (در صورت وجود) به دست آیند:

$$g'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow g(0)=0 \\ x=2 \Rightarrow g(2)=-4 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
بازه	$(-\infty,0)$		$(0,2)$		$(2,+\infty)$		
علامت g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
یکنوایی g	$-\infty$	↗	max نسبی	↘	min نسبی -4	↗	$+\infty$

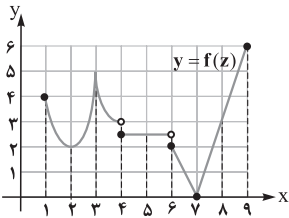
پس نقطهٔ $(0,0)$ ماکزیمم نسبی و نقطهٔ $(2,-4)$ مینیمم نسبی تابع g است.

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۱۰ کتاب درسی

۱- با تکمیل جدول زیر، اکسترمم‌های مطلق و نسبی تابع زیر و هم‌چنین نقاط بحرانی آن را در نقاط مشخص‌شده تعیین کنید.

طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
max مطلق	×	×	×	×	×	×	×	×	✓
min مطلق	×	×	×	×	×	×	✓	×	×
max نسبی	×	×	✓	×	✓	×	×	×	×
min نسبی	×	✓	×	✓	✓	×	✓	×	×
نقطهٔ بحرانی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓

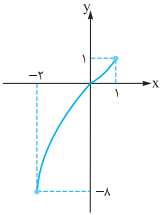


۲- به کمک رسم نمودار تابع، مقادیر اکسترمم نسبی و مطلق تابع‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $t(x)=x^3\ ;\ x\in[-2,1]$

x	-2	0	1
y	-8	0	1

$\Rightarrow$

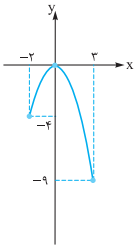


با توجه به نمودار، این تابع اکسترمم نسبی ندارد. نقطهٔ $(۱,۱)$ ماکزیمم مطلق و نقطهٔ $(-۲,-۸)$ مینیمم مطلق f است. پس مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق به ترتیب ۱ و -۸ هستند.

ب) $g(x)=-x^۲\ ;\ x\in[-۲,۳]$

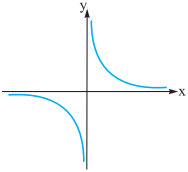
x	-۲	۰	۳
y	-۴	۰	-۹

$\Rightarrow$



از شکل رسم‌شده، نتیجه می‌گیریم که نقطهٔ $(۰,۰)$ ماکزیمم نسبی و مطلق است و نقطهٔ $(۳,-۹)$ مینیمم مطلق می‌باشد؛ پس مقدار ماکزیمم نسبی و مطلق برابر صفر و مقدار مینیمم مطلق برابر -۹ است.

پ) $u(x)=\frac{۱}{x}$



با توجه به شکل این تابع، اکسترمم نسبی و مطلق ندارد.

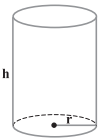
درس ۲

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۱۸ کتاب درسی

۱- می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چه‌قدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

حل: باید مساحت کل استوانه کم‌ترین مقدار ممکن گردد.



۱ حجم استوانه $(lit)=۱۰۰۰cm^۳ \Rightarrow \pi r^۲ h=۱۰۰۰(cm^۲) \Rightarrow h=\frac{۱۰۰۰}{\pi r^۲}$

سطح جانبی + مساحت قاعده = S : مساحت کل استوانه

$$S(r)=\pi r^{2}+2\pi rh \Rightarrow S(r)=\pi r^{2}+2\pi r(\frac{1000}{\pi r^{2}}) \Rightarrow S(r)=\pi r^{2}+\frac{2000}{r}$$

با یافتن نقطهٔ بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r، مقدار $S(r)$ مینیمم می‌گردد.

r	۰	$\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$	$+\infty$
S′	−	۰	+
S	↘	min نسبی	↗

$$S'(r)=2\pi r-\frac{2000}{r^{2}}=0 \Rightarrow \frac{2\pi r^{3}-2000}{r^{2}}=0$$

$$\Rightarrow 2\pi r^{3}-2000=0 \Rightarrow \pi r^{3}=1000 \Rightarrow r^{3}=\frac{1000}{\pi}$$

$$\Rightarrow r=\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$$ نقطهٔ بحرانی تابع S

۲- هزینهٔ سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت، برابر $320v^{2}$ تومان است. هم‌چنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینهٔ آن در یک کیلومتر، کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

حل: اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، داریم:

$C=800000t+(320v^{2})t$: هزینهٔ t ساعت حرکت

$C=800000(\frac{x}{v})+(320v^{2})(\frac{x}{v})$: هزینهٔ x کیلومتر حرکت

$C(v)=\frac{800000}{v}+320v$: هزینهٔ ۱ کیلومتر حرکت

نقطهٔ بحرانی تابع C را بیابید و با تشکیل جدول تغییرات آن، سرعت بهینه را پیدا کنید.

V	۰	۵۰	$+\infty$
C′	−	۰	+
C	↘	min نسبی	↗

$$C'(v)=\frac{-800000}{v^{2}}+320=0 \Rightarrow \frac{800000}{v^{2}}=320 \Rightarrow 320v^{2}=800000$$

$$\Rightarrow v^{2}=\frac{800000}{320}=2500 \Rightarrow v=50\ km/h$$

پس سرعت بهینه برابر ۵۰ کیلومتر در ساعت می‌باشد.

۳- دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل‌ضربشان کم‌ترین مقدار ممکن گردد. فرض می‌کنیم عدد بزرگ‌تر x و عدد کوچک‌تر y باشد:

$$x - y = ۱۰ \Rightarrow y = x - ۱۰$$

اگر تابع حاصل‌ضرب را S بنامیم، خواهیم داشت:

$$S = xy$$

$$\Rightarrow S = x(x-۱۰) = x^۲ - ۱۰x$$

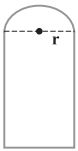
x	$-\infty$		۵		$+\infty$
S'		$-$	۰	$+$	
S		$\searrow$	-۲۵ (min نسبی)	$\nearrow$	

$$S' = ۰ \Rightarrow ۲x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow x = ۵$$

$$\Rightarrow y = x - ۱۰ = ۵ - ۱۰ = -۵ \Rightarrow S_{min} = ۵ \times (-۵) = -۲۵$$

۴- در برخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن می‌باشد به طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

حل: باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.



$$\text{محیط} = ۴/۵ \Rightarrow ۲h + x + \frac{۱}{۲}(۲\pi r) = \frac{۹}{۲} \Rightarrow ۲h + ۲r + \pi r = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow h = \frac{۹}{۴} - r - \frac{\pi r}{۲}$$

مساحت نیم‌دایره + مساحت مستطیل = S : مساحت پنجره

$$S = xh + \frac{۱}{۲}(\pi r^۲) \Rightarrow S(r) = ۲r(\frac{۹}{۴} - r - \frac{\pi r}{۲}) + \frac{۱}{۲}\pi r^۲$$

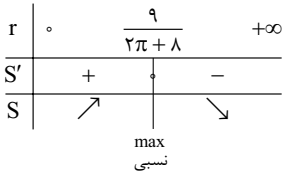
$$\Rightarrow S(r) = -(\frac{\pi + ۴}{۲})r^۲ + \frac{۹}{۲}r$$

با پیداکردن نقطهٔ بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r، مقدار $S(r)$ بیشترین مقدار ممکن می‌شود.

نقطهٔ بحرانی تابع S:

$$S'(r) = -۲(\frac{\pi + ۴}{۲})r + \frac{۹}{۲} = ۰ \Rightarrow (\pi + ۴)r = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow r = \frac{۹}{۲(\pi + ۴)} = \frac{۹}{۲\pi + ۸}$$



فصل ششم

درس ۱

کار در کلاس ــــــــــــــــــــ صفحهٔ ۱۲۵ کتاب درسی

۱- شکل حاصل از دوران حول محور را در حالت‌های زیر مشخص کنید و آن‌ها را با هم مقایسه کنید:

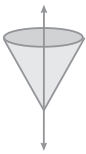
الف) شکل حاصل از دوران نیم‌خط حول محور

از دوران نیم‌خط داده‌شده، حول محورِ مفروض، یک سطح مخروطی دوّار ایجاد می‌شود. مولدهای این مخروط تا بی‌نهایت امتداد دارند.

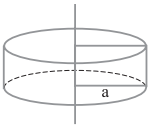
ب) شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول محور



باز هم یک سطح مخروطی دوّار ایجاد می‌شود با این تفاوت که مولدهای این مخروط، تا بی‌نهایت امتداد ندارند و این سطح مخروطی، شامل یک سطح دایره‌ای در قاعده‌اش می‌باشد.



۲- مستطیلی را حول عرض آن دوران داده‌ایم.



الف) شکل حاصل را رسم کنید.

شکل حاصل، یک استوانه با شعاع قاعدهٔ a (طول مستطیل) و ارتفاع b (عرض مستطیل) می‌باشد.

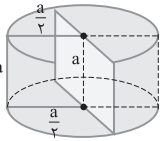
ب) سطح مقطع حاصل از برخورد یک استوانه و یک صفحه در چه حالتی یک مربع است؟

در دو حالت این اتفاق رخ می‌دهد:

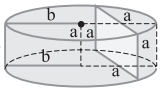
۱- استوانه از دوران یک مستطیل با طول ۲ برابر عرض آن، حول طول به وجود آمده باشد و صفحهٔ عمود بر قاعده، شامل قطر قاعده باشد.

۲- استوانه از دوران یک مستطیل ایجاد شده باشد و صفحهٔ عمود بر قاعده، شامل وتری از دایره باشد که اندازه‌اش با اندازهٔ ارتفاع استوانه برابر باشد.

حالت اول:



حالت دوم:



پ) اگر ابعاد مستطیل ۳ و ۴ باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحهٔ موازی با قاعدهٔ این استوانه چه‌قدر است؟

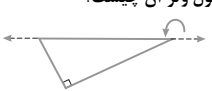
باید مساحت دایرهٔ قاعدهٔ استوانه را به دست آوریم: $S = \pi r^2 = \pi \times ۴^2 = ۱۶\pi$

ت) در حالت پ، اگر صفحه‌ای عمود بر قاعدهٔ استوانه آن را قطع کند، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چه‌قدر است؟

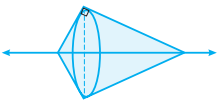
سطح مقطع حاصل، یک مستطیل است که بیشترین مقدار مساحتش وقتی ایجاد می‌شود که صفحهٔ مفروض شامل قطر دایرهٔ قاعده باشد و داریم:

مستطیل مقطع $S = ۸ \times ۳ = ۲۴$

۳- شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چیست؟



در حالت کلی، شکل ایجادشده، از دو مخروط غیرمساوی تشکیل می‌شود. مولد هر یک از مخروط‌ها، یکی از اضلاع زاویهٔ قائمه است، ضمناً دو مخروط، قاعدهٔ مشترکی دارند که اندازهٔ شعاع آن برابر با ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ اولیه است.

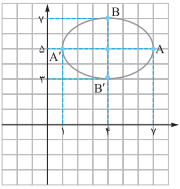


۱- اگر در یک بیضی داشته باشیم $a=5$ و $b=3$، در این صورت اندازهٔ فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 5^2=3^2+c^2 \Rightarrow c^2=25-9=16$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} c=4 \Rightarrow FF'=2c=2\times 4=8$$

۲- در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.



اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات (۴،۵) باشد:

الف) فاصلهٔ کانونی بیضی را پیدا کنید.

$$\begin{cases} AA'=2a=6 \Rightarrow a=3 \\ BB'=2b=4 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 9=4+c^2 \Rightarrow c^2=5 \Rightarrow c=\sqrt{5} \Rightarrow FF'=2c=2\sqrt{5}$$

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و هم‌چنین کانون‌های بیضی را بنویسید.

با توجه به شکل، بیضی افقی است لذا نقاط A و A' و F و F' با نقطهٔ O هم‌عرض هستند. ضمناً رأس‌های B و B' با نقطهٔ O هم‌طول هستند و داریم:

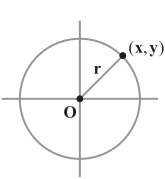
$$O\begin{vmatrix}4\\5\end{vmatrix} \Rightarrow A\begin{vmatrix}4+3\\5\end{vmatrix} \quad , \quad A'\begin{vmatrix}4-3\\5\end{vmatrix} \qquad O\begin{vmatrix}4\\5\end{vmatrix} \Rightarrow B\begin{vmatrix}4\\5+2\end{vmatrix} \quad , \quad B'\begin{vmatrix}4\\5-2\end{vmatrix}$$

$$O\begin{vmatrix}4\\5\end{vmatrix} \Rightarrow F\begin{vmatrix}4+\sqrt{5}\\5\end{vmatrix} \quad , \quad F'\begin{vmatrix}4-\sqrt{5}\\5\end{vmatrix}$$

درس ۲

۱- در حالت‌های زیر، معادلهٔ دایره را بنویسید:

الف) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲.



$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

$$\xrightarrow[r=2]{\substack{O\begin{vmatrix}\circ\to\alpha\\ \circ\to\beta\end{vmatrix}}} x^2+y^2=4$$

ب) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \xrightarrow{O\begin{vmatrix}\circ\\ \circ\end{vmatrix}} x^2+y^2=r^2$$

پ) دایره‌ای که از نقطهٔ $(-1,3)$ بگذرد و مرکز آن $(-1,2)$ باشد.

ابتدا شعاع دایره را به دست می‌آوریم. فاصلهٔ نقطهٔ $A(-1,3)$ از مرکز یعنی

$O(2,-1)$ همان شعاع دایره است:

$$OA = r = \sqrt{(2-1)^2+(-1+3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

معادلهٔ دایره $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \xrightarrow[r=\sqrt{5}]{O\left|\begin{matrix}2\to\alpha\\-1\to\beta\end{matrix}\right.} (x-2)^2+(y+1)^2=5$

۲- با تکمیل جدول، وضعیت هر نقطه را نسبت به دایره مشخص کنید:

معادلهٔ دایره	شعاع و مختصات مرکز دایره	نقاط		
		$A(1,1)$	$B(0,3)$	$C(-2,4)$
$(x+2)^2+(y-3)^2=4$	$O\left\|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$, $r=\sqrt{4}=2$	بیرون دایره	روی دایره	داخل دایره
$(x-1)^2+(y+2)^2=9$	**دایره به مرکز $(2,-1)$ و شعاع ۳**	روی دایره	**بیرون دایره**	بیرون دایره

به عنوان نمونه، نقاط ردیف اول جدول را تک‌تک در سمت چپ معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم تا موقعیت آن‌ها نسبت به دایره مشخص شوند:

$$(x+2)^2+(y-3)^2=4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\left|\begin{matrix}1\to x\\1\to y\end{matrix}\right. \Rightarrow (1+2)^2+(1-3)^2=13>4 \Rightarrow \text{A بیرون دایره است.} \\ B\left|\begin{matrix}0\to x\\3\to y\end{matrix}\right. \Rightarrow (0+2)^2+(3-3)^2=4=4 \Rightarrow \text{B روی دایره است.} \\ C\left|\begin{matrix}-2\to x\\4\to y\end{matrix}\right. \Rightarrow (-2+2)^2+(4-3)^2=1<4 \Rightarrow \text{C داخل دایره است.} \end{cases}$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\left|\begin{matrix}1\to x\\1\to y\end{matrix}\right. \Rightarrow (1-1)^2+(1+2)^2=9=9 \Rightarrow \text{A روی دایره است.} \\ B\left|\begin{matrix}0\to x\\3\to y\end{matrix}\right. \Rightarrow (0-1)^2+(3+2)^2=26>9 \Rightarrow \text{B خارج دایره است.} \\ C\left|\begin{matrix}-2\to x\\4\to y\end{matrix}\right. \Rightarrow (-2-1)^2+(4+2)^2=45>9 \Rightarrow \text{C خارج دایره است.} \end{cases}$$

۳- اگر معادلهٔ دایره‌ای به شکل $(x+1)^2+y^2=4$ باشد:

الف) مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره را بنویسید.

$$\text{مرکز دایره} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad , \quad r=\sqrt{4}=2$$

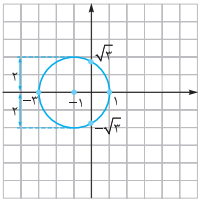
ب) مختصات نقاط تقاطع این دایره را با محورهای مختصات پیدا کنید.

برای یافتن نقاط برخورد با محور xها به جای y صفر می‌گذاریم و برای یافتن نقاط برخورد با محور yها به جای x صفر می‌گذاریم:

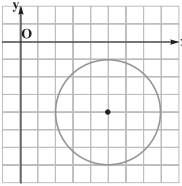
$$(x+1)^2+y^2=4 \begin{cases} \xrightarrow{x=0} 1^2+y^2=4 \Rightarrow y^2=3 \\ \Rightarrow y=\pm\sqrt{3} \quad \text{نقاط برخورد با محور yها:} \\ \xrightarrow{y=0} (x+1)^2+0=4 \Rightarrow x+1=\pm 2 \\ \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \quad \text{نقاط برخورد با محور xها:} \end{cases}$$

پس نقاط تقاطع با محور xها عبارت‌اند از $(1,0)$ و $(-3,0)$ و نقاط تقاطع با محور yها عبارت‌اند از $(0,\sqrt{3})$ و $(0,-\sqrt{3})$.

پ) شکل این دایره را رسم کنید و صحت پاسخ‌های خود را به کمک شکل بررسی کنید.



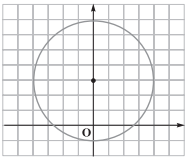
۴- معادلهٔ دایره‌های زیر را بنویسید:



$$\text{مرکز} \begin{vmatrix} 5 \to \alpha \\ -4 \to \beta \end{vmatrix}, r=3$$

$$\Rightarrow (x-5)^2+(y+4)^2=3^2$$

$$\Rightarrow (x-5)^2+(y+4)^2=9$$



$$\begin{vmatrix} 0 \to \alpha \\ 3 \to \beta \end{vmatrix} \quad , \quad r=4$$

$$\text{مرکز} \Rightarrow (x-0)^2+(y-3)^2=4^2$$

$$\Rightarrow x^2+(y-3)^2=16$$

کار در کلاس ـــــــــــــــــــ صفحهٔ ۱۳۷ کتاب درسی

معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای به شکل $x^۲+y^۲-۲x-۶y+۶=۰$ است. مختصات مرکز این دایره و شعاع آن را پیدا کنید و معادلهٔ دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

$$\text{مرکز } O\begin{vmatrix}-\frac{a}{۲}=\frac{-(-۲)}{۲}=۱\\ -\frac{b}{۲}=\frac{-(-۶)}{۲}=۳\end{vmatrix},$$

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+(-۶)^۲-۴(+۶)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶}=۲$$

کار در کلاس ـــــــــــــــــــ صفحهٔ ۱۳۹ کتاب درسی

۱- در موارد زیر وضعیت خط و دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x+۲y-۱=۰$ و خط $x+y=۱$: فاصلهٔ مرکز دایره از خط را به دست می‌آوریم و آن را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.

$$x^۲+y^۲+۲x+۲y-۱=۰ \Rightarrow O\begin{vmatrix}\frac{-a}{۲}=\frac{-۲}{۲}=-۱\\ \frac{-b}{۲}=\frac{-۲}{۲}=-۱\end{vmatrix}$$

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴-۴(-۱)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۲}=\frac{۱}{۲}\times۲\sqrt{۳}=\sqrt{۳}$$

$$\text{فاصلهٔ مرکز دایره تا خط داده‌شده } d=\frac{|(۱)(-۱)+(۱)(-۱)-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}$$

$$=\frac{۳}{\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow d>r$$

پس خط و دایره نقطهٔ تقاطع ندارند.

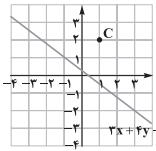
ب) دایرهٔ $(x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۴$ و خط $y=-۱`

$$O\begin{vmatrix}۲\\ -۳\end{vmatrix},\ r=۲$$

$$d=\frac{|(۰)(۲)+(۱)(-۳)+۱|}{\sqrt{۰^۲+۱^۲}}=\frac{۲}{۱}=۲ \Rightarrow d=r$$

پس خط بر دایره مماس است. (خط و دایره یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.)

۲- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خط $۳x+۴y-۱=۰$ مماس بوده و مرکز آن $C(۱,۲)$ باشد.

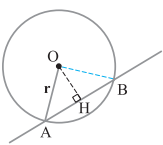


می‌دانیم فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره، همان شعاع دایره است، پس فاصلهٔ $C(1,2)$ تا خط $3x+4y-1=0$ را به دست می‌آوریم:

$$r=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3(1)+4(2)+(-1)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{\sqrt{25}}=\frac{10}{5}=2$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=4$$

۳- مرکز دایره‌ای، نقطهٔ $O(2,-3)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره را بنویسید.



طول وتر AB داده شده است و برابر ۶ است. مثلث OAB متساوی‌الساقین است چون $OA=OB=r$ می‌باشد؛ لذا ارتفاع وارد بر قاعده، میانه هم محسوب می‌شود؛ لذا:

$$AB=6 \Rightarrow AH=3$$

حالا فاصلهٔ O از خط $3x-4y+2=0$ را به دست می‌آوریم:

$$OH=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3(2)+(-4)(-3)+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4$$

رابطهٔ فیثاغورس در مثلث OAH: $OA^2=OH^2+AH^2 \Rightarrow OA^2=4^2+3^2$

$$\Rightarrow OA^2=25 \Rightarrow OA=5 \Rightarrow r=5$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=25$$

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۴۱ کتاب درسی

۱- با انجام مراحل زیر، معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر دایرهٔ $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ مماس‌بیرون و مرکز آن نقطهٔ $O(2,-2)$ باشد:

- **مختصات نقطهٔ O'، مرکز دایرهٔ داده‌شده عبارت است از:**

$$O'\begin{cases}-\frac{a}{2}=-\frac{2}{2}=-1\\ -\frac{b}{2}=\frac{-(-4)}{2}=2\end{cases}$$

- **اندازهٔ r' یعنی شعاع دایرهٔ داده‌شده‌برابر است با:**

$$r'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+16}=3$$

طول OO' برابر است با:

$$OO' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

شرط این‌که دو دایره مماس‌بیرونی باشند، این است که: $OO' = r + r'$، پس شعاع r باید برابر ۲ باشد.

معادلهٔ دایرهٔ مطلوب را با معلوم‌بودن اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز آن بنویسید:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

۲- برای حالت‌های زیر معادلهٔ دو دایره را بنویسید و پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

الف) دو دایره هم‌مرکز باشند. ما به دلخواه فرض می‌کنیم مرکز دایره‌ها $O(0,0)$ باشد، لذا داریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow O\Big|_{0}^{0} \quad , \quad r = \sqrt{9} = 3 \\ x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow O\Big|_{0}^{0} \quad , \quad r' = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$

این سؤال بی‌شمار جواب دارد.

ب) دو دایره بیرون هم باشند.

برای آن‌که دو دایره بیرون هم باشند، طول خط‌المرکزین دو دایره باید از $(r + r')$ بیشتر باشد. فرض می‌کنیم $O(4,2)$ و $O'(10,2)$ باشند. طول OO' برابر است با: $OO' = 10 - 4 = 6$

حالا فرض می‌کنیم $r = 2$ و $r' = 3$ پس الآن رابطهٔ $OO' > r + r'$ برقرار است. لذا دو دایره عبارت‌اند از:

$$(O\Big|_{2}^{4} \quad , \quad r = 2) \Rightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$(O'\Big|_{2}^{10} \quad , \quad r' = 3) \Rightarrow (x-10)^2 + (y-2)^2 = 9$$

البته این‌گونه مسائل، بی‌شمار جواب دارند.

۳- برای موارد زیر وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید:

الف) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ **و** $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

ابتدا مرکزها و شعاع‌های دو دایره و سپس خط‌المرکزین را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \Rightarrow O\Big|_{-\frac{b}{2} = -\frac{4}{2} = -2}^{-\frac{a}{2} = \frac{-(-2)}{2} = 1}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(0)} = \sqrt{5}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \Rightarrow O' \left| \begin{matrix} -\frac{a}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \\ -\frac{b}{2} = \frac{-(-4)}{2} = 2 \end{matrix} \right.$$

$$r' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (-4)^2 - 4(0)} = \sqrt{5}$$

$$OO' = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$OO' = r + r' \Rightarrow$ دو دایره، مماس‌خارج هستند.

ب) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1 \Rightarrow O \left| \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right. \quad , \quad r = \sqrt{1} = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow O' \left| \begin{matrix} -\frac{a}{2} = \frac{-(-2)}{2} = 1 \\ -\frac{b}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \end{matrix} \right.$$

$$r' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(1)} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$OO' = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$= 2\sqrt{5} \simeq 2 \times 2/2 = 4/4$$

$$|r - r'| = |1 - 2| = 1 \quad , \quad r + r' = 1 + 2 = 3$$

$OO' > r + r' \Rightarrow$ دو دایره متخارج هستند.